

Bien rédiger en mathématiques

Règles de fond et de forme pour une copie claire, rigoureuse et efficace

Une bonne rédaction mathématique ne consiste pas à écrire beaucoup. Elle consiste à rendre visible la logique du raisonnement : ce que l'on sait, ce que l'on utilise, pourquoi on l'utilise et ce que l'on conclut.

Table des matières

1	Les principes essentiels	2
1.1	Répondre exactement à la question posée	2
1.2	Introduire les objets utilisés	2
1.3	Distinguer calcul et raisonnement	2
1.4	Justifier les étapes importantes	3
1.5	Vérifier les hypothèses des théorèmes	3
1.6	Ne pas confondre exemple et démonstration	3
2	Logique, symboles et domaines de validité	3
2.1	Implication et équivalence	3
2.2	Le signe égal n'est pas un mot de liaison	4
2.3	Respecter les quantificateurs	4
2.4	Toujours contrôler le domaine de définition	4
2.5	Ne pas diviser sans précaution	4
3	Construire une démonstration	4
3.1	Structure générale	4
3.2	Conclure explicitement	5
3.3	Récurrence	5
3.4	Raisonnement par l'absurde	5
3.5	Contraposée	5
4	La forme d'une copie de mathématiques	5
4.1	Numéroter et ordonner les réponses	5
4.2	Aérer la copie	5
4.3	Aligner les calculs	5
4.4	Utiliser des phrases, sans bavardage	6
4.5	Soigner les notations	6
4.6	Parenthèses et fractions	6
4.7	Unités et valeurs approchées	6
4.8	Mettre en évidence sans surcharger	6
5	Rédactions types en analyse	6
5.1	Étude d'une fonction	6
5.2	Résolution d'une équation ou inéquation	7
5.3	Limite	7
5.4	Dérivée	7
5.5	Intégrale	7
6	Trouver le bon niveau de détail	7
6.1	Exemple comparatif	8
7	Ce qu'un correcteur doit voir immédiatement	8
8	Checklist avant de rendre sa copie	9

1. Les principes essentiels

En mathématiques, trouver le bon résultat ne suffit pas. Une solution doit permettre à un lecteur de comprendre :

- ce que l'on cherche à montrer ;
- quelles informations sont utilisées ;
- pourquoi chaque étape est valide ;
- comment les calculs conduisent à la conclusion ;
- où commence et où se termine le raisonnement.

À retenir

Une bonne rédaction mathématique doit être **correcte, rigoureuse, lisible et efficace**. Il faut écrire tout ce qui est nécessaire à la compréhension et à la validation du raisonnement, sans ajouter ce qui est inutile.

1.1. Répondre exactement à la question posée

Les verbes d'un énoncé n'ont pas le même sens : *calculer, déterminer, résoudre, montrer, démontrer, justifier, étudier, en déduire, donner un contre-exemple*.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ ne consiste pas seulement à calculer un discriminant. Il faut conclure :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad \boxed{S = \{2, 3\}}.$$

1.2. Introduire les objets utilisés

Un symbole ne doit pas apparaître sans avoir été introduit ou défini par l'énoncé.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \quad u_n = \frac{1}{n+1}, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 3x + 1.$$

1.3. Distinguer calcul et raisonnement

Une suite de calculs n'est pas toujours une démonstration. Il faut expliciter les articulations logiques.

Exemple

Pour résoudre $x^2 - 4 = 0$:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Ainsi,

$$(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2,$$

d'où

$$\boxed{S = \{-2, 2\}}.$$

1.4. Justifier les étapes importantes

Chaque passage non immédiat doit être justifié par une définition, un théorème, une propriété, une hypothèse de l'énoncé, un calcul ou un résultat obtenu précédemment.

Exemple

Si $u_n = \frac{1}{n+1}$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

1.5. Vérifier les hypothèses des théorèmes

On ne cite pas un théorème comme une formule magique. Il faut vérifier qu'il s'applique.

Méthode

Avant d'utiliser un théorème, écrire ou vérifier explicitement ses hypothèses. Par exemple, pour le théorème des valeurs intermédiaires : continuité sur un intervalle et position de la valeur recherchée entre les deux images aux extrémités.

1.6. Ne pas confondre exemple et démonstration

Quelques valeurs numériques peuvent suggérer une propriété, mais ne prouvent pas une affirmation universelle.

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$n^2 + n = n(n+1).$$

Deux entiers consécutifs contiennent toujours un entier pair. Leur produit est donc pair. Ainsi $n^2 + n$ est pair pour tout entier n .

2. Logique, symboles et domaines de validité

2.1. Implication et équivalence

$$P \Rightarrow Q$$

signifie : « si P est vraie, alors Q est vraie ».

$$P \Leftrightarrow Q$$

signifie : « P est vraie si et seulement si Q est vraie ».

Attention

Une équivalence exige que les deux sens soient valides. Ne jamais utiliser $\Leftrightarrow$ par automatisme.

2.2. Le signe égal n'est pas un mot de liaison

Le symbole $=$ signifie que deux objets sont égaux. Il ne signifie ni « donc », ni « puis », ni « ce qui donne ».

Exemple

Écriture incorrecte :

$$x^2 = 4 = x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Écriture correcte :

$$x^2 = 4 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

2.3. Respecter les quantificateurs

$$\forall x \in E$$

signifie « pour tout x appartenant à E », tandis que

$$\exists x \in E$$

signifie « il existe au moins un x appartenant à E ».

Pour montrer une propriété vraie pour tout réel, on commence typiquement par : « Soit $x \in \mathbb{R}$ ».

2.4. Toujours contrôler le domaine de définition

Quelques contraintes classiques :

$$\frac{1}{x-2} : x \neq 2, \quad \sqrt{x} : x \geq 0, \quad \ln x : x > 0.$$

Une solution obtenue par calcul doit rester compatible avec ces conditions.

2.5. Ne pas diviser sans précaution

À partir de

$$x(x-2) = 0,$$

on ne divise pas par x puisque x peut être nul. On utilise la propriété du produit nul :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

3. Construire une démonstration

3.1. Structure générale

Une démonstration claire comporte généralement quatre éléments :

1. le point de départ : hypothèses et objets ;
2. l'objectif : ce qu'il faut établir ;
3. le raisonnement : propriétés et calculs utilisés ;
4. la conclusion : ce qui vient d'être démontré.

Exemple

Montrons que le carré d'un entier impair est impair. Soit n impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Comme $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, n^2 est de la forme $2m + 1$. Donc n^2 est impair.

3.2. Conclure explicitement

Une solution ne doit pas s'arrêter après un calcul. Une conclusion rend la réponse immédiatement identifiable.

Formulations utiles : « Ainsi », « Donc », « Par conséquent », « On en déduit que ».

3.3. Récurrence

Une rédaction par récurrence doit faire apparaître clairement :

1. **Initialisation** : vérification au premier rang ;
2. **Hérédité** : supposer la propriété vraie au rang n et établir le rang $n + 1$;
3. **Conclusion** : application explicite du principe de récurrence.

3.4. Raisonnement par l'absurde

Structure recommandée :

Supposons, par l'absurde, que... Alors... On obtient... Ce résultat contredit... L'hypothèse de départ est donc fausse. Par conséquent...

La contradiction doit être identifiée explicitement.

3.5. Contraposée

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut montrer

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Il est préférable d'annoncer la méthode : « Montrons l'implication par contraposée. »

4. La forme d'une copie de mathématiques**4.1. Numéroté et ordonner les réponses**

Les réponses suivent l'ordre du sujet et chaque question est clairement identifiée : 1.a), 1.b), 2.a), etc.

4.2. Aérer la copie

Laisser de l'espace entre deux raisonnements distincts. Une copie compacte ralentit la lecture et augmente le risque d'erreur.

4.3. Aligner les calculs

$$\begin{aligned} A &= (x + 2)^2 - (x - 1)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 2x + 1) \\ &= 6x + 3. \end{aligned}$$

Une transformation importante par ligne facilite le contrôle.

4.4. Utiliser des phrases, sans bavardage

Une copie n'est pas une succession de symboles. Les phrases servent à introduire une méthode, citer un théorème, expliquer ou conclure. En revanche, éviter les commentaires narratifs inutiles.

Préférer : « Calculons $f'(x)$. »

Éviter : « Maintenant je vais essayer de calculer la dérivée pour voir ce que cela donne. »

4.5. Soigner les notations

Il faut distinguer clairement :

$$f, \quad f(x), \quad f', \quad f'(x),$$

et, pour les suites,

$$u_n \quad \text{et} \quad (u_n).$$

4.6. Parenthèses et fractions

Les parenthèses évitent les ambiguïtés :

$$f(x+h) - f(x), \quad \frac{1}{x+1} \neq \frac{1}{x} + 1.$$

4.7. Unités et valeurs approchées

Une grandeur physique doit être accompagnée de son unité :

$$\boxed{v = 12 \text{ m s}^{-1}}.$$

Une valeur approchée s'écrit avec $\simeq$:

$$\sqrt{2} \simeq 1,414.$$

4.8. Mettre en évidence sans surcharger

Encadrer les réponses finales ou les résultats structurants :

$$\boxed{x = 4}.$$

Si tout est encadré, plus rien n'est réellement mis en évidence.

5. Rédactions types en analyse

5.1. Étude d'une fonction

Ordre classique :

1. ensemble de définition ;
2. limites éventuelles ;
3. dérivée ;
4. signe de la dérivée ;
5. tableau de variations ;
6. points remarquables ;
7. interprétation graphique si nécessaire.

5.2. Résolution d'une équation ou inéquation

Toujours préciser l'ensemble de travail, effectuer les transformations légitimes, puis donner explicitement l'ensemble solution.

Exemple

Réolvons dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0.$$

On factorise :

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1).$$

L'étude du signe donne

$$S =] - \infty, -1] \cup [4, +\infty[.$$

5.3. Limite

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 1/x}{1 - 1/x^2} = 3.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} = 3.$$

5.4. Dérivée

Exemple

Soit $f(x) = (x^2 + 1)e^x$. La fonction est un produit, donc

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x(x + 1)^2.$$

La simplification finale facilite ensuite l'étude du signe.

5.5. Intégrale

Dans une intégrale définie, faire apparaître une primitive, l'évaluation aux bornes et le résultat.

Exemple

Une primitive de $x \mapsto 3x^2 + 1$ est $F(x) = x^3 + x$. Ainsi

$$\int_0^2 (3x^2 + 1) dx = [F(x)]_0^2 = (8 + 2) - 0 = 10.$$

6. Trouver le bon niveau de détail

Le bon principe est le suivant :

À retenir

Expliciter les décisions et les étapes mathématiquement significatives ; alléger les opérations devenues évidentes au niveau considéré.

Une copie trop elliptique oblige le correcteur à reconstruire le raisonnement. Une copie trop détaillée masque l'essentiel.

6.1. Exemple comparatif

Question : soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Attention

Rédaction insuffisante :

$$f' = 2x - 4, \quad 2x - 4 = 0, \quad x = 2,$$

« décroissante puis croissante ».

Exemple

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

Ainsi, $f'(x) < 0$ si $x < 2$, $f'(2) = 0$ et $f'(x) > 0$ si $x > 2$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $] -\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

De plus,

$$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3.$$

La fonction admet donc un minimum égal à

$$\boxed{-3}$$

atteint pour

$$\boxed{x = 2}.$$

7. Ce qu'un correcteur doit voir immédiatement

Une bonne copie permet de répondre sans effort aux questions suivantes :

- Qu'est-ce que l'étudiant cherche ?
- Quelle propriété utilise-t-il ?
- Pourquoi a-t-il le droit de l'utiliser ?
- Quel calcul effectue-t-il ?
- Qu'en déduit-il ?
- Quelle est sa réponse finale ?

À retenir

Une excellente rédaction réunit cinq qualités : **exactitude, rigueur, clarté, concision et lisibilité.**

8. Checklist avant de rendre sa copie

Vérification

- | | |
|---|---|
| ☐ J'ai répondu à toutes les questions. | ☐ Je n'ai pas divisé par une quantité potentiellement nulle sans précaution. |
| ☐ J'ai clairement numéroté mes réponses. | ☐ Mes calculs sont lisibles et alignés. |
| ☐ J'ai introduit les objets et variables utilisés. | ☐ Mes figures sont suffisamment précises. |
| ☐ J'ai indiqué les domaines de définition nécessaires. | ☐ J'ai indiqué les unités lorsque nécessaire. |
| ☐ J'ai justifié les étapes importantes. | ☐ J'ai distingué valeurs exactes et valeurs approchées. |
| ☐ J'ai vérifié les hypothèses des théorèmes utilisés. | ☐ J'ai clairement formulé mes conclusions. |
| ☐ Je n'ai pas utilisé $=$ à la place de « donc ». | ☐ J'ai vérifié la cohérence de mes résultats. |
| ☐ J'ai distingué implication et équivalence. | ☐ Un lecteur peut comprendre ma solution sans explication orale. |

J'annonce $\rightarrow$ je justifie $\rightarrow$ je calcule $\rightarrow$ j'interprète $\rightarrow$ je conclus

Le but d'une copie n'est pas seulement de montrer que l'on possède la réponse. Le but est de montrer **pourquoi cette réponse est mathématiquement correcte**.