

Devoir surveillé - Rédaction mathématique

Analyse, suites et probabilités

Durée conseillée : 1 heure

Calculatrice autorisée

Consignes. Toute réponse doit être justifiée. Les théorèmes utilisés doivent être cités avec leurs hypothèses vérifiées. Les résultats finaux doivent être clairement identifiés. Une valeur approchée sera donnée au millième, sauf indication contraire.

Barème indicatif : exercice 1 : 7 points ; exercice 2 : 7 points ; exercice 3 : 6 points.**Exercice 1 - Étude d'une fonction****/7**On considère la fonction f définie sur $[0; 2]$ par

$$f(x) = e^x - x - 2.$$

1. Calculer $f'(x)$, puis étudier les variations de f sur $[0; 2]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 2]$. Montrer ensuite que

$$1 < \alpha < 2.$$

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 2 - Une suite récurrente**/7**On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 - Contrôle de qualité**/6**

Une entreprise fabrique des composants à l'aide de deux machines A et B .

- 65 % des composants sont produits par la machine A ;
- 35 % sont produits par la machine B ;
- parmi les composants produits par A , 2 % sont défectueux ;
- parmi les composants produits par B , 5 % sont défectueux.

On choisit au hasard un composant. On note D l'événement : « le composant est défectueux ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(D)$.
3. Sachant que le composant choisi est défectueux, calculer la probabilité qu'il ait été produit par la machine B .
4. On prélève désormais 10 composants de façon indépendante, dans des conditions identiques. On note X le nombre de composants défectueux parmi les 10.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
 - b. Calculer la probabilité qu'au moins un composant soit défectueux.

Une copie claire permet au correcteur de suivre le raisonnement sans avoir à le reconstruire.