

Devoir surveillé - Rédaction mathématique

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = e^x - x - 2$.

- 1) Calculer $f'(x)$, puis étudier les variations de f sur $[0; 2]$.

La fonction f est dérivable sur $[0; 2]$ comme somme de fonctions dérivables.
Pour tout x de $[0; 2]$, $f'(x) = e^x - 1$.

Or, sur $[0; 2]$, on a $e^x \geq 1$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Donc $f'(x) \geq 0$ sur $[0; 2]$ et $f'(x) > 0$ sur $]0; 2]$.

x	0	2
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	-1	$e^2 - 4$



Ainsi, f est croissante sur $[0; 2]$.

- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 2]$.

Montrer ensuite que $1 < \alpha < 2$.

La fonction f est continue sur $[0; 2]$.

De plus, $f(1) = e - 3 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$.

Comme 0 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel α appartenant à $]1; 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme f est croissante sur $[0; 2]$, cette solution est unique.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 2]$, avec $1 < \alpha < 2$.

- 3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

On a $f(1) = e - 3$ et $f'(1) = e - 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = (e - 1)(x - 1) + e - 3$$

$$y = (e - 1)x - 2.$$

Ainsi, une équation de la tangente est $T : y = (e - 1)x - 2$.

Devoir surveillé - Rédaction mathématique

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par.

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1 et u_2 .

On a :

$$u_1 = \frac{u_0 + 6}{4} = \frac{0 + 6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Puis

$$u_2 = \frac{u_1 + 6}{4} = \frac{\frac{3}{2} + 6}{4} = \frac{\frac{15}{2}}{4} = \frac{15}{8}.$$

Donc $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_2 = \frac{15}{8}$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 2$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leq u_n \leq 2$.

Alors $6 \leq u_n + 6 \leq 8$.

En divisant par 4, qui est positif, on obtient

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2.$$

En particulier, $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

3) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 6}{4} - u_n \\ &= \frac{u_n + 6 - 4u_n}{4} \\ &= \frac{6 - 3u_n}{4} \\ &= \frac{3(2 - u_n)}{4}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2$.

Donc $2 - u_n \geq 0$, puis $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

Notons l sa limite.

En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient :

$$l = \frac{l + 6}{4}.$$

Donc $4l = l + 6$, puis $3l = 6$, d'où $l = 2$.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 2.

Devoir surveillé - Rédaction mathématique

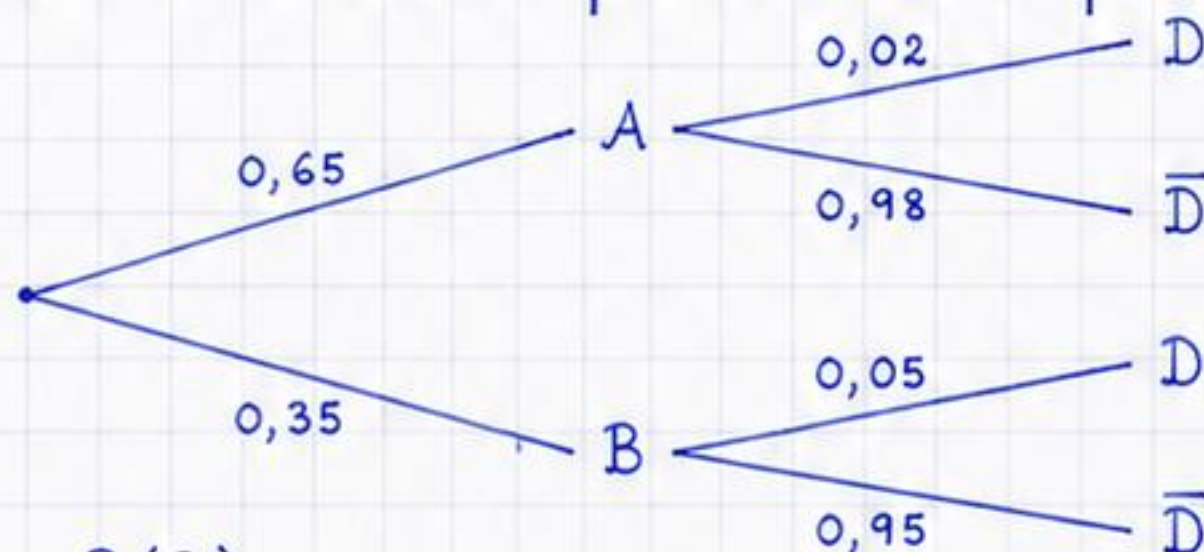
Exercice 3

Une entreprise fabrique des composants à l'aide de deux machines A et B.

On note D l'événement : « le composant est défectueux ».

On a : $P(A) = 0,65$; $P(B) = 0,35$; $P_A(D) = 0,02$; $P_B(D) = 0,05$.

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré.



- 2) Calculer $P(D)$.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) \\ &= 0,65 \times 0,02 + 0,35 \times 0,05 \\ &= 0,013 + 0,0175 \\ &= 0,0305. \end{aligned}$$

Donc $P(D) = 0,0305$.

- 3) Sachant que le composant choisi est défectueux, calculer la probabilité qu'il ait été produit par la machine B.

On cherche $P_D(B)$.

Par la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,35 \times 0,05}{0,0305} = \frac{0,0175}{0,0305} = \frac{35}{61} \approx 0,574.$$

Donc la probabilité cherchée est environ 0,574.

- 4) On prélève désormais 10 composants de façon indépendante.

On note X le nombre de composants défectueux parmi les 10.

- a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Chaque prélèvement est indépendant et la probabilité qu'un composant soit défectueux est $p = 0,0305$.

Donc X suit la loi binomiale $B(10 ; 0,0305)$.

- b) Calculer la probabilité qu'au moins un composant soit défectueux.

On cherche $P(X \geq 1)$.

On utilise l'événement contraire :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - (1 - 0,0305)^{10} \\ &= 1 - 0,9695^{10} \\ &\approx 0,266. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité qu'au moins un composant soit défectueux est environ 0,266.